Flussi di campi vettoriali, il teorema di Stokes e il teorema della divergenza

Riccarda Rossi

Università di Brescia

Analisi II

Richiami di teoria

- Sia $\mathcal{S}$ una superficie, con rappresentazione parametrica data da $T \subset \mathbb{R}^2$ e

$$\overrightarrow{r} : T \to \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u, v) \text{ regolare.}$$

Il versore normale a $\mathcal{S}$ è

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} \right\|} \left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} \right)$$

Flusso di un campo vettoriale attraverso $\mathcal{S}$

Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, $\overrightarrow{r}(T) \subset A$, $\overrightarrow{F} : A \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1. Il *flusso di* $\overrightarrow{F}$ *attraverso* $\mathcal{S}$ è

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S$$

con $\cdot$ il prodotto scalare.

Quindi

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, \mathrm{d}S = \iint_{T} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v}(u,v) \right) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

- Nel caso di $\mathcal{S}$ in forma cartesiana

$$\mathcal{S}: \; z = f(x,y), \quad (x,y) \in T \subset \mathbb{R}^2$$

si ha

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2}} \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i}_1 - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{i}_2 + 1 \vec{i}_3 \right)$$

quindi

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S$$
$$= \iint_T \vec{F}(x,y,f(x,y)) \cdot \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i}_1 - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{i}_2 + 1 \vec{i}_3 \right) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Es. 1.

Calcolare il flusso di

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = xy\,\overrightarrow{i}_1 + xy\,\overrightarrow{i}_2 + z\,\overrightarrow{i}_3$$

attraverso

$$\mathcal{S}: \quad \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2, \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Es. 2.

Calcolare il flusso del rotore di

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{i}_1 + z\,\overrightarrow{i}_2 + x\,\overrightarrow{i}_3$$

attraverso

$$\mathcal{S}: \quad \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2, \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Il teorema di Stokes

Sia $\mathcal{S}$ una superficie, con rappr. parametrica

$$\vec{r} : T \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{r} = \vec{r}(u,v) \text{ regolare e semplice.}$$

e sia

$$\Gamma = \partial\mathcal{S} \quad \text{(curva semplice, chiusa, reg. tratti)}$$

percorsa lasciando a sinistra il versore normale a S, $A \subset \mathbb{R}^3$, e

$$\vec{F} : A \to \mathbb{R}^3 \quad \text{di classe } \mathrm{C}^1.$$

Si ha

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \; \mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot \; \mathrm{d}\Gamma$$

Si passa da un integrale di superficie a un integrale curvilineo!


S


S

Es. 3. (è ancora l'Es. 2.)

Il flusso del rotore di

$$\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i}_1 + z\,\vec{i}_2 + x\,\vec{i}_3$$

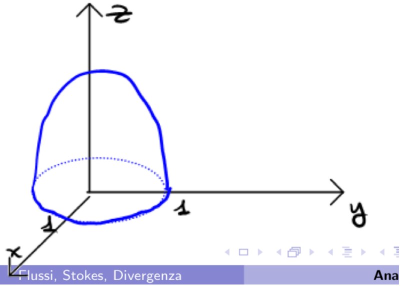
attraverso

$$\mathcal{S}: \quad \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2, \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Stokes:

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\ \mathrm{d}S = \oint_{\Gamma \equiv \partial\mathcal{S}} \vec{F} \cdot\ \mathrm{d}\Gamma$$

qui: $\Gamma: \ x^2 + y^2 = 1$



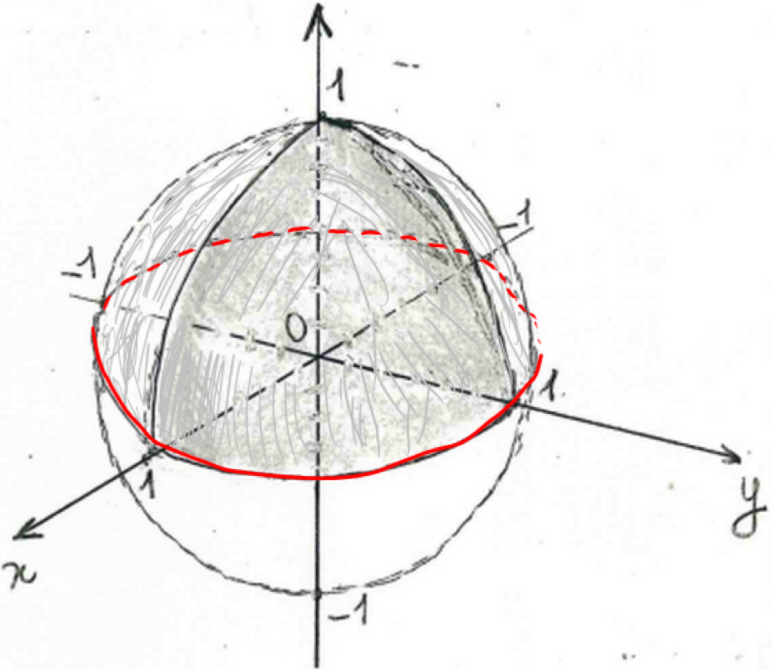
Es. 4.

Il flusso del rotore del campo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{i}_1 + 2z\,\overrightarrow{i}_2 + 3x\,\overrightarrow{i}_3$$

attraverso

$$\mathcal{S}: \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$


1
-1
-1
0
1
1
y
x
-1

Es. 5.

Il flusso del rotore del campo

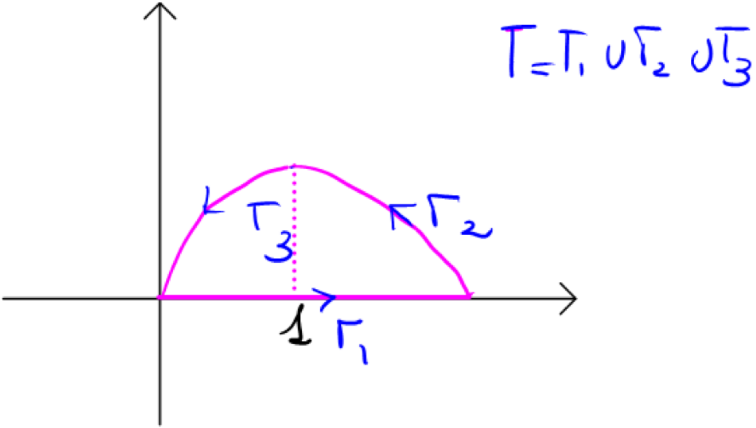
$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = xy\,\overrightarrow{i}_1 + xy\,\overrightarrow{i}_2 + 0\,\overrightarrow{i}_3$$

attraverso la regione piana $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, con

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right\},$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \le x \le \sqrt{2}, \ 0 \le y \le \sqrt{2-x^2} \right\}.$$

Applichiamo la formula di Stokes $\rightsquigarrow$ studiamo $\Gamma = \partial\mathcal{S}$



$$\text{con} \quad \begin{cases} \Gamma_1 \text{ segmento fra } (0,0) \text{ e } (\sqrt{2},0) \\ \Gamma_2 \text{ arco circonf. } x^2+y^2=2 \text{ da } (\sqrt{2},0) \text{ a } (1,1) \\ \Gamma_3 \text{ curva } y=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \text{ da } (1,1) \text{ a } (0,0) \end{cases}$$

Es. 5.

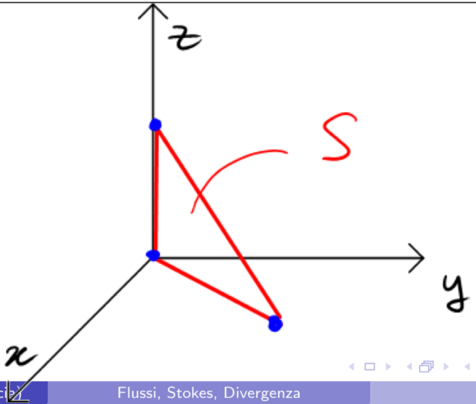
Calcolare

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n} \, d\mathcal{S}$$

con

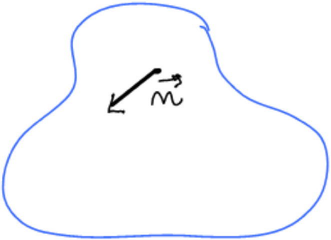
$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^2 \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k},$$

$\mathcal{S}$ è il triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(0,0,1)$ ed $\overrightarrow{n}$ è la normale tale che $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{i} > 0$.



Richiami di teoria: il teorema della divergenza

- $V \subset \mathbb{R}^3$ chiuso e limitato
- $S = \partial V$ superficie regolare chiusa
- $\overrightarrow{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{F} \in C^1(A)$ con A insieme aperto, $V \subset A$.



Allora

$$\iiint_V \mathrm{div}(\overrightarrow{F})\, dxdydz = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, dS$$

ove $\overrightarrow{n}$ è versore normale esterno a S e

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

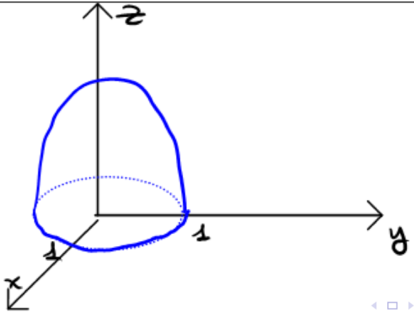
Es. 6.

Calcolare il flusso di

$$\vec{F}(x,y,z) = xy\,\vec{i}_1 + xy\,\vec{i}_2 + z\,\vec{i}_3$$

attraverso la superf. $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, dove

$$\mathcal{S}_1: \begin{cases} z = 1 - x^2 - y^2 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_2: \begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$



Es. 7.

Calcolare il flusso di

$$\overrightarrow{F}(x, y, z) = y\,\overrightarrow{i} + x\,\overrightarrow{j} + z^3\,\overrightarrow{k}$$

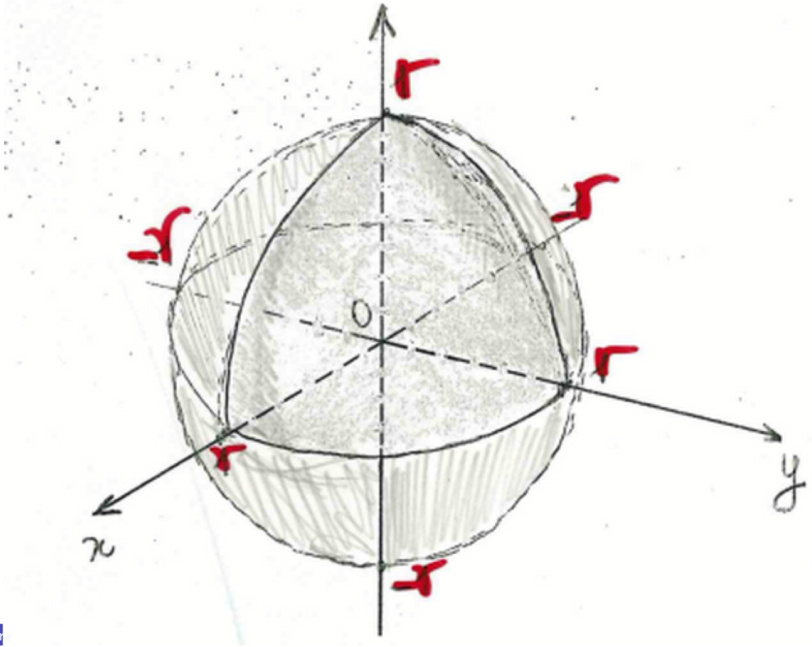
attraverso la superficie sferica $\mathcal{S}$ di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2.

Applichiamo il Teorema della divergenza

$$\iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\, d\mathcal{S} = \iiint_V \operatorname{div} \overrightarrow{F}\, dxdydz$$

dove

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}\,.$$


O
x
y